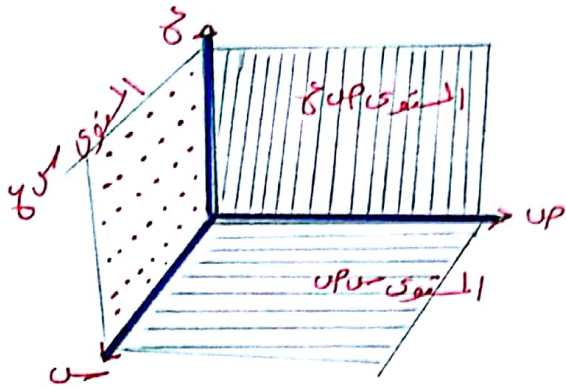
الأدهم
فى
الهندسة الفراغية
عام وأزهر
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم

الوحدة الأولى

الدرس الأول : النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد

ملاحظات

١) المستوى الإحداثي س ص معادلته ع = ٠

٢) المستوى الإحداثي س ع معادلته ص = ٠

٣) المستوى الإحداثي ص ع معادلته س = ٠

---

٤) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣)

موازياً س ص هو ع = ٣

موازياً ص ع هو س = ١

موازياً س ع هو ص = ٢

لاحظ الفرق بين الجزئيه التى فاتوا

---

٥) معادلة محور س فى الفراغ هو ص = ٠ ، ع = ٠

٦) معادلة محور ص فى الفراغ هو س = ٠ ، ع = ٠

٧) معادلة محور ع فى الفراغ هو س = ٠ ، ص = ٠

٨) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}^-}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}^-}$ يعينان المستوى س ص

---

٩) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}^-}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}^-}$ يعينان المستوى س ع وهكذا

---

١٠) بعد النقطة (أ ، ب ، جـ) (س ، ص ، ع)

أ) عن المستوى

س ص = |جـ|

ص ع = |أ|

س ع = |ب|

ب) عن المحور

س = $\sqrt{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$

ص = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}$

ع = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

أكمل

١) النقطة (٠، ٥، ٠) تقع على محور ص

٢) النقطة (٠، ٠، -٢) تقع على محور ع

٣) النقطة (-٢، ٠، ١) تقع في المستوى س ع الذي معادلته ص = ٠

٤) بعد النقطة (-٤، -٣، ٢) عن المستوى س ص = ٢

ص ع = |-٤| = ٤

س ع = |-٣| = ٣ وحدة طول

عن المحور

س = $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ وحدة طول

ص = $\sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ وحدة طول

ع = $\sqrt{16+9}$ = ٥ وحدة طول

٥) في الشكل المقابل متوازي مستطيلات

أ(٥، ٨، ٤) فإن

١) ب = (٠، ٨، ٤) في المستوى ص ع

٢) جـ = (٠، ٠، ٤) محور ع

٣) د = (٥، ٠، ٤) في المستوى س ع

٤) أَ = (٥، ٨، ٠) في المستوى س ص

الفكرة الثانية

١) البعد بين النقطتين (س١، ص١، ع١) ، (س٢، ص٢، ع٢)

هي النازع

$= \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$

٢) لإثبات أن أ، ب، جـ على استقامة واحدة

أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين

مثلاً: أ جـ = أ ب + ب جـ

٣) لإثبات أن المثلث متساوي الأضلاع

أ ب = ب جـ = أ جـ

٤) لتحديد نوع المثلث من حيث زواياه

اذا كان أ جـ هو أكبر الأضلاع مثلاً

$(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ قائم في ب

$(أ جـ)^2 > (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ منفرج في ب

$(أ جـ)^2 < (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ حاد الزوايا

٥) إحداثيات منتصف أ ب

$= \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

(١) إذا كان أ$(7 ، 0 ، 4)$ ، ب$(1 ، 0 ، 0)$

فإن أب = ... وحدة طول

الحل

أب $= \sqrt{(7-1)^2 + 0 + (4)^2} = 2\sqrt{13}$ وحدة طول

---

(٢) اثبت أن أ$(1 ، 2 ، 5)$ ، ب$(2 ، 5 ، 3)$ ، جـ$(-1 ، 3 ، 2)$

هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع وأوجد مساحته.

الحل

أب $= \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{14}$ وحدة طول

ب جـ $= \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{14}$ وحدة طول

أ جـ $= \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2 + (5-2)^2}$

$= \sqrt{14}$ وحدة طول

∵ أب = ب جـ = أ جـ

∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع.

مساحة △ = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جا المحصورة

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{14} \times$ جا 60

$= \frac{7\sqrt{3}}{2}$ وحدة مربعة

---

(٣) أوجد نقطة منتصف أب حيث

أ$(1 ، -3 ، 2)$ ، ب$(4 ، -1 ، 4)$

الحل

م $= \left(\frac{1+4}{2} ، \frac{-3-1}{2} ، \frac{2+4}{2}\right)$

$= \left(\frac{5}{2} ، -2 ، 3\right)$

---

(٤) إذا كانت جـ$(-1 ، 4 ، 0)$

هي منتصف أب حيث ب$(4 ، -2 ، 1)$

أوجد إحداثيات أ

الحل

∵ جـ منتصف أب

∴ $\frac{أ+ب}{2} =$ جـ

أ + ب = ٢ جـ

أ = ٢ جـ − ب

أ $= 2(-1 ، 4 ، 0) - (4 ، -2 ، 1)$

$= (-2 ، 8 ، 0) - (4 ، -2 ، 1) = (-6 ، 10 ، -1)$

---

(٥) إذا كانت جـ$(-1 ، 6 ، -5)$

منتصف أب حيث أ(ل − ٢ ، −١ ، م + ٣)

ب(٢ ، ن − ٧ ، −٢)

فإن قيمة ل + م − ن هي ...

الحل

جـ $= \left(\frac{ل-2+2}{2} ، \frac{-1+ن-7}{2} ، \frac{م+3-2}{2}\right)$

$\left(\frac{ل}{2} ، \frac{ن-8}{2} ، \frac{م+1}{2}\right) = (-1 ، 6 ، -5)$

ل/٢ = -١ ∴ ل = -٢

(ن - ٨)/٢ = ٦ ، ن - ٨ = ١٢ ∴ ن = ٢٠

(م + ١)/٢ = -٥ ، م + ١ = -١٠ ∴ م = -١١

∴ ل + م - ن

= -٢ - ١١ - ٢٠ = -٣٣

---

٦) إذا كانت أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، ج ∈ محور ع وكانت (١ ، -١ ، ٠) منتصف أب ، (٠ ، -١ ، ٢) منتصف ب ج أوجد إحداثيات منتصف أج

الحل

أ(س ، ٠ ، ٠) ب(٠ ، ص ، ٠) ، ج(٠ ، ٠ ، ع)

منتصف أب

(س/٢ ، ص/٢ ، ٠) = (١ ، -١ ، ٠)

∴ س/٢ = ١ ∴ س = ٢

ص/٢ = -١ ∴ ص = -٢

منتصف ب ج

(٠ ، ص/٢ ، ع/٢) = (٠ ، -١ ، ٢)

∴ ص = -٢

ع = ٤

∴ منتصف أج

= (س/٢ ، ٠ ، ع/٢)

= (٢/٢ ، ٠ ، ٤/٢) = (١ ، ٠ ، ٢)

معادلة الكرة في الفراغ

١) الصورة القياسية

(س - ل)² + (ص - ك)² + (ع - ن)² = نق²

حيث مركزها (ل ، ك ، ن)

٢) المعادلة العامة

س² + ص² + ع² + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + د = ٠

٣) مركزها (-ل ، -ك ، -ن)

٤) نق = √(ل² + ك² + ن² - د)

٥) د = ل² + ك² + ن² - نق²

٦) حجم الكرة = ٤/٣ ط نق³ وحدة مكعبة

٧) مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق² وحدة مربعة

١ عين مركز وطول نصف قطر الكرة التالية

$(س-٥)^{٢}+(ص+٤)^{٢}+(ع+٢)^{٢}=٢٥$

ثم أوجد مساحة سطحها وحجمها

الحل

* م $(٥ ، -٤ ، -٢)$
* نق $=٥$ وحدة طول
* مساحة سطحها $=٤ط\,نق^{٢}=١٠٠ط$ وحدة مربعة
* حجمها $=\frac{٤}{٣}ط\,نق^{٣}=\frac{٤}{٣}ط\times ١٢٥=\frac{٥٠٠}{٣}ط$ وحدة مكعبة

---

٢ عين مركز وطول نصف قطر الكرة :

$س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}+٢س-٤ص+٦ع+١٢=٠$

الحل

* م $=(-١ ، ٢ ، -٣)$ د $=١٢$

نق $=\sqrt{ل^{٢}+ك^{٢}+ن^{٢}-د}$

* نق $=\sqrt{١+٤+٩-١٢}=\sqrt{٢}$ وحدة طول

---

٣ أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل والنقطة $(٥ ، -٢ ، ٣)$ تقع عليها .

الحل

م$(٠ ، ٠ ، ٠)$

نق $=\sqrt{(٥)^{٢}+(-٢)^{٢}+(٣)^{٢}}=\sqrt{٣٨}$ وحدة

$س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=نق^{٢}$

* $س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=٣٨$

حالة خاصة ١

إذا كان مركز الكرة يقع على محور س والكرة تمس المستوى ص ع فإن إحداثيات المركز $(أ ، ٠ ، ٠)$ ، نق $=|أ|$

وهكذا لباقي المحاور

---

٤ أوجد معادلات الكرة التي يقع مركزها على محور س وتمس المستوى ص ع ويبعد مركزها عنه ٤ وحدات طول

الحل

لاحظ إن المركز هنا على محور س

$|س|=٤$ ∴ $س=\pm ٤$

∴ المركز هو $(٤ ، ٠ ، ٠)$ أو $(-٤ ، ٠ ، ٠)$

وهنا يحقق معادلتان

* $(س-٤)^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=١٦$
* $(س+٤)^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=١٦$

حالة خاصة (٢)

الكرة التي مركزها (أ ، ب ، ج) وتمس المستوى س ص فإن نق = |ج|

س ع فإن نق = |ب|

ص ع فإن نق = |أ|

---

(٥) أوجد معادلة الكرة التي مركزها (-٠ ، ١ ، -٢) وتمس المستوى الاحداثي س ص

الحل

∵ الكرة تمس المستوى س ص

∴ نق = |ع| = |-٢| = ٢ وحدة طول

والمعادلة هي

$(س+٠)^2 + (ص-١)^2 + (ع+٢)^2 = ٤$

حالة خاصة (٣)

الكرة التي تمس مستويات الاحداثيات تكون مركزها (± نق ، ± نق ، ± نق)

---

(٦) أوجد معادلة الكرة التي تمس مستويات الإحداثيات وإحداثيات مركزها موجبة وطول نصف قطرها ٥ وحدات

مركزها (٥ ، ٥ ، ٥) نق = ٥

والمعادلة هي

$(س-٥)^2 + (ص-٥)^2 + (ع-٥)^2 = ٢٥$

---

(٧) أوجد معادلة الكرة التي تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول قطرها $١٠\sqrt{٢}$ وحدة طول.

الحل

ركز شوية اللي قبل دي كانت تمس المستويات دي تمس المحاور

$نق = \frac{١٠\sqrt{٢}}{٢} = ٥\sqrt{٢}$

ومركزها = $\frac{نق}{\sqrt{٢}}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ معادلة الكرة هي

$(س-٥)^2 + (ص-٥)^2 + (ع-٥)^2 = ٥٠$

---

(٨) أوجد معادلة أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

الحل

هذه النقط هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع

طول ضلعه = $٥\sqrt{٢}$

المركز = $(\frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣})$

$\frac{أ}{جا أ} = ٢ نق$ ، $\frac{٥\sqrt{٢}}{جا ٦٠} = ٢ نق$ ← هذه قاعدة الجيب

$∴ نق = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠}$

∴ نق = $\frac{\sqrt{75}}{3}$

∴ معادلة أصغر كرة هي ..

$(س - \frac{5}{3})^2 + (ص - \frac{5}{3})^2 + (ع - \frac{5}{3})^2 = \frac{50}{3}$

اختر الإجابة الصحيحة

(١) معادلة الكرة التي مركزها (٢، -٢، ٥) ، نق = $2\sqrt{5}$ وحدة طول ..

$(س - ٢)^2 + (ص + ٢)^2 + (ع - ٥)^2 = ٢٠$

(٢) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات هي ...

$س^2 + ص^2 + ع^2 = ٩$

(٣) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣، -١، ٢) هي ...

نق = $\sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$س^2 + ص^2 + ع^2 = ١٤$ ✓

(٤) معادلة الكرة التي مركزها (٢، -٣، ٤) وتمس المستوى الإحداثي س ص هي ...

نق = |٤| = ٤

$(س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع - ٤)^2 = ١٦$

(٥) $س^2 + ص^2 + ع^2 + ٤س - ٦ص + ٨ع + ٤ = ٠$

معادلة كرة طول قطرها = ... وحدة طول

م (-٢، ٣، -٤) د = ٤

نق = $\sqrt{4+9+16-4}$ = ٥

$\sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - د}$

∴ طول قطرها = ١٠ وحدة طول.

(٦) نصف قطر أصغر كرة تقع عليها النقاط (٠، ٠، ٥) ، (٥، ٠، ٠) ، (٠، ٥، ٠) هو ... وحدة طول

$\frac{\sqrt{75}}{3}$ ∴ نق = $\frac{2\sqrt{75}}{6}$ = ٢نق

(٧) نصف قطر أصغر كرة تمر بالنقط (٥، ٥، ٠) ، (٠، ٥، ٥) ، (٥، ٠، ٥) هو ... وحدة طول

نفس الفكرة $\frac{\sqrt{75}}{3}$

(٨) إذا قطع المحور س الكرة

$(س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع - ١)^2 = ١٤$

في أ ، ب أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

نوجد نقطة تقاطع المحور س مع الكرة

وهي ص = ٠ ، ع = ٠

$(س - ٢)^2 + ٩ + ١ = ١٤$

$(س - ٢)^2 = ٤$ ∴ س - ٢ = ± ٢

$س - ٢ = \pm ٢$

$س - ٢ = ٢$ | $س - ٢ = -٢$

$س = ٤$ | $س = ٠$

أ $(٤ ، ٠ ، ٠)$ | ب $(٠ ، ٠ ، ٠)$

$\therefore$ أ ب $= ٤$ وحدة طول

٩ إذا كانت الكرتان

$(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$

، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ل)^٢ = ٢٥$

متماستان فأوجد قيمة ل

الحل

م$_١$ $(٣ ، ٠ ، ٣)$ | م$_٢$ $(-١ ، ٤ ، ل)$

نق$_١$ $= ٤$ | نق$_٢$ $= ٥$

م$_١$م$_٢$ $= \sqrt{(٣+١)^٢ + (-٤)^٢ + (٣-ل)^٢}$

احتمال يكون تماس من الداخل أو من الخارج

* اولاً من الداخل

م$_١$م$_٢$ $=$ نق$_٢$ - نق$_١$

$\sqrt{٣٢ + (٣-ل)^٢} = ١$ بتربيع الطرفين

$٣٢ + (٣-ل)^٢ = ١$

$(٣-ل)^٢ = ١ - ٣٢$

$(٣-ل)^٢ = -٣١$ مرفوض

* في حالة التماس من الخارج

م$_١$م$_٢$ $=$ نق$_١$ + نق$_٢$

$\therefore \sqrt{٣٢ + (٣-ل)^٢} = ٥ + ٤ = ٩$ بالتربيع

$٣٢ + (٣-ل)^٢ = ٨١$

$(٣-ل)^٢ = ٨١ - ٣٢ = ٤٩$

$٣ - ل = \pm ٧$

$٣ - ل = ٧$ | $٣ - ل = -٧$

$-ل = ٧ - ٣$ | $-ل = -٧ - ٣$

$-ل = ٤$ | $-ل = -١٠$

$ل = -٤$ | $\therefore ل = ١٠$

١) أ⃗ = (أس ، أص ، أع)

- أس مركبة المتجه أ⃗ فى اتجاه محور س
- أص مركبة المتجه أ⃗ فى اتجاه محور ص
- أع مركبة المتجه أ⃗ فى اتجاه محور ع

٢) ||أ⃗|| = √(أس² + أص² + أع²)

٣) ||أ⃗ + ب⃗|| ≤ ||أ⃗|| + ||ب⃗||

٤) إذا كان ||أ⃗|| = ||ك ب⃗|| فإن ||أ⃗|| = |ك| . ||ب⃗||

٥) ملحوظة: إذا كان |ك| = ٣ فإن ك = ± ٣

٦) متجه الوحدة: هو متجه معياره وحدة الأطوال.

ى⃗أ = أ⃗ / ||أ⃗|| = المتجه / معياره

٧) س⃗ = (١ ، ٠ ، ٠)

ص⃗ = (٠ ، ١ ، ٠)

ع⃗ = (٠ ، ٠ ، ١)

٨) أب⃗ = ب⃗ − أ⃗

جد⃗ = د⃗ − ج⃗

مسائل

١) إذا كان أ⃗ = (−٣ ، ٤ ، ٢) فإن ||أ⃗|| = ...

√(٩ + ١٦ + ٤) = √٢٩ وحدة طول

٢) إذا كان أ⃗ (−٢ ، ٣ ، ١)

ب⃗ (٠ ، ٢ ، −٢)

ج⃗ (١ ، −٣ ، ٥)

فإن ||أ⃗ + ب⃗ − ج⃗|| = ...

أ⃗ + ب⃗ − ج⃗ = (−٢ −١ ، ٣ + ٥ ، ١ − ٢ − ٥)

= (−٣ ، ٨ ، −٦)

||أ⃗ + ب⃗ − ج⃗|| = √(٩ + ٦٤ + ٣٦) = √١٠٩ وحدة طول

٣) إذا كان ||٤ أ⃗|| = ||٣ك أ⃗|| فإن ك = ...

٤ ||أ⃗|| = |٣ك| ||أ⃗||

|٣ك| = ٤ ∴ |ك| = ٤/٣ ∴ ك = ± ٤/٣

(٤) إذا كان $\overrightarrow{A} = (1, 2, -4)$ ، $\overrightarrow{B} = (1, 1, ل-1)$

وكان $\|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\| = 7$ وحدة طولية

فأوجد قيمة ل ؟...

الحل

$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B} = (2, 3, ل-5)$

$\because \|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\| = 7$

$\sqrt{4+9+(ل-5)^2} = 7$ بالتربيع

$13 + (ل-5)^2 = 49$

$(ل-5)^2 = 49-13 = 36$

$ل-5 = \pm 6$

$ل = \pm 6 + 5$

$ل = 6+5$ ، $\boxed{ل = 11}$ | $ل = -6+5$ ، $\boxed{ل = -1}$

$\therefore ل = 11 ، -1$

(٥) متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{A} = (2, 3, 2\sqrt{3})$ = ----

الحل

$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|} = \frac{(2, 3, 2\sqrt{3})}{\sqrt{4+9+12}}$

$= \frac{1}{5}(2, 3, 2\sqrt{3})$

$= \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

(٦) إذا كان $\overrightarrow{A} = (3, -2, م)$ وكان $\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{22}$ فإن م = ---

الحل

$\sqrt{9+4+م^2} = \sqrt{22}$ بالتربيع

$13 + م^2 = 22$

$م^2 = 22 - 13 = 9$

$\therefore م = \pm 3$

(٧) إذا كان $\overrightarrow{A} = (-1, 5, -2)$ ، $\overrightarrow{B} = (3, 1, 1)$

وكان $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C} = \overrightarrow{س}$ فإن $\overrightarrow{C}$ = ---

الحل

$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{C} = (1, 0, 0) - (-1, 5, -2) - (3, 1, 1)$

$= (-1, -6, 1)$

$= -\overrightarrow{س} - 6\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

(٨) إذا كان $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 7)$ ، $\overrightarrow{BC} = (0, 1, 5)$

فإن $\|\overrightarrow{AC}\|$ = ...

الحل

ملحوظة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = (-3, 4, 12)$

$\therefore \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+16+144} = 13$ وحدة طول

الفكرة الثانية

١) ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$)

هى الزوايا التى يصنعها المتجه $\vec{م}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات

، $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ $\in$ $[٠ ، \pi]$

٢) ملحوظة متجه الوحدة = جيوب تمام الاتجاه = $\frac{\vec{م}}{\|\vec{م}\|}$

٣) جتا^٢ $\theta_{س}$ + جتا^٢ $\theta_{ص}$ + جتا^٢ $\theta_{ع}$ = ١

٤) إذا كانت ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هى للمتجه $\vec{م}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه $-\vec{م}$

هى ($\pi - \theta_{س}$ ، $\pi - \theta_{ص}$ ، $\pi - \theta_{ع}$)

٥) إذا كان المتجه $\vec{م}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الاحداثيات الموجبة فإن

$\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$

٣ جتا^٢ θ = ١

جتا^٢ θ = $\frac{١}{٣}$

$\therefore$ جتا θ = $\frac{\pm ١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ θ = $٥٤^\circ ٤٤ ^\prime ٨ ^{\prime\prime}$ أو θ = $١٢٥^\circ ١٥ ^\prime ٥٢ ^{\prime\prime}$

٦) مجموع قياس أى زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوى ٩٠°

٧) إذا كان مجموع قياس زاويتين ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة = ٩٠°

٨) زوايا اتجاه المحاور الموجبة

محور س	(٠° ، ٩٠° ، ٩٠°)
ص	(٩٠° ، ٠ ، ٩٠°)
ع	(٩٠° ، ٩٠° ، ٠)

٩) جيوب تمام الاتجاه

محور س	(١ ، ٠ ، ٠)
ص	(٠ ، ١ ، ٠)
ع	(٠ ، ٠ ، ١)

١٠) جتا ٢θ = جتا^٢ θ - جا^٢ θ

= ٢ جتا^٢ θ - ١

= ١ - ٢ جا^٢ θ

المسائل

(١) أوجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{ق} = ٣\vec{س} - ٤\vec{ص} + ٥\vec{ع}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

الحل

$\|\vec{ق}\| = \sqrt{٩+١٦+٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

$\vec{ه}_{ق} = \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

∴ $جتا\ \theta_{س} = \frac{٣}{٥\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta_{س} \simeq ٦٤° ٥٤'$

$جتا\ \theta_{ص} = \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta_{ص} \simeq ١٢٤° ٢٧'$

$جتا\ \theta_{ع} = \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta_{ع} \simeq ٤٥°$

(٢) إذا كان المتجه $\vec{أ}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س، ص، ع زوايا قياساتها ٦٠°، ٨٠°، θ حيث θ حادة

المطلوب

أ) أوجد قيمة θ

ب) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\vec{أ}$ إذا علمت أن $\|\vec{أ}\| = ١٣$

الحل

أ) ∵ $جتا^٢ \theta_{س} + جتا^٢ \theta_{ص} + جتا^٢ \theta_{ع} = ١$

$جتا^٢ ٦٠° + جتا^٢ ٨٠° + جتا^٢ \theta = ١$

$جتا^٢ \theta = ١ - [جتا^٢ ٦٠° + جتا^٢ ٨٠°]$

$\simeq ٠,٧١٩٨٥$

$جتا\ \theta = \pm\sqrt{\quad}$ ——— وجتاها + فقط لأنها حادة

$= ٠,٨٤٨٤$

∴ $جتا\ \theta =$ $\theta \simeq ٣١° ٥٧'$

ب) لأن وحدة $\vec{أ}$: $\vec{ه}_{أ} = \frac{\vec{أ}}{\|\vec{أ}\|}$

∴ $\vec{أ} = \|\vec{أ}\| \times \vec{ه}_{أ}$

= المعيار × متجه الوحدة

= المعيار × جيوب تمام الاتجاه

$\vec{أ} = ١٣ (جتا ٦٠° ، جتا ٨٠° ، جتا ٣١° ٥٧')$

$= \frac{١٣}{٢}\vec{س} + ٢,٢٦\vec{ص} + ١١,٠٣\vec{ع}$

(٣) جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\vec{أ} = (-٢ ، ١ ، ٢)$

هو ---

متجه الوحدة $= \frac{\vec{أ}}{\|\vec{أ}\|} = \frac{(-٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٤+١+٤}}$

$= \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

متجه زوايا الاتجاه له (٤٥° ، ٤٥° ، θ)

فإن θ = --- ٩٠°

[إذا أنقصنا مجموع زاويتيه] = ٩٠°

يبقى الثالثة = ٩٠°

(٤) (٣٠° ، ٦٠° ، θ) فإن θ = ٩٠°

٥ إذا كانت: (٣٠°، ٧٠°، θ) هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٦٠° (د) ٦٨° أو ١١٢°

هنجرب كل واحدة إذا كانت $جتا^2 θ_س + جتا^2 θ_ص + جتا^2 θ_ع = ١$ هتكون هي الصح

---

٦ اثبت أن

$جا^2 θ_س + جا^2 θ_ص + جا^2 θ_ع = ٢$

الحل

$∵ جا^2 θ + جتا^2 θ = ١$

$جا^2 θ = ١ - جتا^2 θ$

$١ - جتا^2 θ_س + ١ - جتا^2 θ_ص + ١ - جتا^2 θ_ع$

$= ٣ - [جتا^2 θ_س + جتا^2 θ_ص + جتا^2 θ_ع]$

$= ٣ - ١ = ٢$

---

٧ اثبت أن

$جتا ٢θ_س + جتا ٢θ_ص + جتا ٢θ_ع + ١ = ٠$

الحل

$∵ جتا ٢θ = ٢ جتا^2 θ - ١$ المقدار

$٢ جتا^2 θ_س - ١ + ٢ جتا^2 θ_ص - ١ + ٢ جتا^2 θ_ع - ١ + ١$

$٢ [جتا^2 θ_س + جتا^2 θ_ص + جتا^2 θ_ع] - ٢$

$= ٢ × ١ - ٢$ = صفر أ.هـ

---

٨ الشكل المقابل

يمثل قوة ق مقدارها ٢٠٠ نيوتن.

(الشكل: متوازي مستطيلات على المحاور س، ص، ع، أبعاده ٣م، ٤م، ٥م)

(أ) عبر عن ق بالصورة الجبرية

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة ق

الحل

(أ) نفرض أن $\overrightarrow{م}$ يمثل القطر الذي تعمل فيه القوة ق

$∵ \overrightarrow{م} (٣، ٤، ٥)$ $∴ \|\overrightarrow{م}\| = ٥\sqrt{٢}$

$∴ \overrightarrow{م}_0 = \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}}، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}}، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$∴ \overrightarrow{ق}$ = المقدار × متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{م}$

$\overrightarrow{ق} = ٢٠٠ × \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}}، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}}، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$= ٦٠\sqrt{٢}\ \overrightarrow{س} + ٨٠\sqrt{٢}\ \overrightarrow{ص} + ١٠٠\sqrt{٢}\ \overrightarrow{ع}$

(ب) $θ_س = جتا^{-١} \frac{٣}{٥\sqrt{٢}} ≃ ٦٤° ٥٤'$

$θ_ص = جتا^{-١} \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ≃ ٥٥° ٣٣'$

$θ_ع = جتا^{-١} \frac{٥}{٥\sqrt{٢}} = ٤٥°$

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

حيث θ هي الزاوية الصغرى بينهما داخلين لها أو خارجين منها

(٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} =$ أس بس + أص بص + أع بع

(٣) إذا كانت $\theta = ٠^\circ$ متوازيين جتا ٠ = ١

مثل $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} = ١$

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2$

(٤) إذا كانت $\theta = ٩٠^\circ$ جتا ٩٠ = ٠ متعامدان

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا ٩٠ = صفر

مثل $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} =$ صفر

(٥) جتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين متجهين

$٠^\circ \le \theta \le ١٨٠^\circ$

(٦) مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ [المركبة الجبرية]

هـ أب $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا θ

(٧) المركبة الاتجاهية $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$

$\left(\dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right)\left(\dfrac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}\right) = \left(\dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$

(٨) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

(٩) $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2$

(١٠) شرط التعامد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} =$ صفر

(١١) شغ = $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

↓ الشغل ↓ القوة ↓ الإزاحة

جول = نيوتن . م

إرج = داين . سم

(١) أوجد $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ في الحالات التالية

(أ) $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٨$ ، $\theta = ٦٠°$

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \, جتا\,\theta$

$= ٦ \times ٨ \; جتا\,٦٠° = ٢٤$

(ب) $\overrightarrow{أ} = (٥ ، ١ ، -٢)$

$\overrightarrow{ب} = (٤ ، -٤ ، ٣)$

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = (٥ \times ٤) + (١ \times -٤) + (-٢ \times ٣)$

$= ٢٠ - ٤ - ٦ = ١٠$

(٢) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين في الحالات التالية

(أ) $(٥ ، ١ ، -٢)$ ، $(١ ، ١ ، -١)$

$جتا\,\theta = \dfrac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|} = \dfrac{٥ + ١ + ٢}{\sqrt{٢٥+١+٤} \times \sqrt{٣}}$

$\theta = جتا^{-١} \dfrac{٨}{\sqrt{٩٠}} \simeq ٣٢° \; ٣٠' \; ٤٥''$

(ب) $\overrightarrow{أ} = ٤\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٧\overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{ب} = ٢\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$

$جتا\,\theta = \dfrac{٨ + ١٥ + ٢٨}{\sqrt{١٦+٩+٤٩} \times \sqrt{٤+٢٥+١٦}}$

$\therefore \theta = ٢٧° \; ٥٣' \; ٥٠''$

(٣) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد:

(أ) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ}$

(ب) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{جـد}$

(جـ) مركبة $\overrightarrow{جـد}$ في اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$

الحل

(أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم)

$جا\,هـ = \dfrac{٨}{١٠}$

$جتا\,هـ = \dfrac{٦}{١٠}$

(أ) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ} = \|\overrightarrow{أب}\| \, \|\overrightarrow{أجـ}\| \, جتا\,هـ$

$= ٦ \times ١٠ \times \dfrac{٦}{١٠} = ٣٦$

(ب) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{جـد} = ٦ \times ٦ \; جتا\,١٨٠° = -٣٦$

(جـ) مركبة $\overrightarrow{جـد}$ في اتجاه $\overrightarrow{بجـ} = \dfrac{\overrightarrow{جـد} \cdot \overrightarrow{بجـ}}{\|\overrightarrow{بجـ}\|}$

$=$ صفر لأن $\overrightarrow{جـد} \perp \overrightarrow{بجـ}$

(٤) الشغل المبذول من القوة $\vec{ق} = ٣\vec{س} + ٧\vec{ع}$ لتحريك جسم من نقطة أ $(١، ١، ٢)$ إلى ب $(٧، ٣، ٥)$ = ----

الحل

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٦، ٢، ٣)$

$ش = \vec{ق} \cdot \vec{ف}$

$= (٣، ٠، ٧) \cdot (٦، ٢، ٣)$

$١٨ + ٠ + ٢١ = ٣٩$ وحدة شغل

---

(٥) جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\vec{أ} = (١، -٣، ٠)$ ، $\vec{ب} = (٢، ٠، ١)$ = ----

الحل

$جتا θ = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|} = \frac{٢ + ٠ + ٠}{\sqrt{١ + ٩} \times \sqrt{٤ + ١}}$

$جتا θ = \frac{٢}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٥٠}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

---

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين $٣\vec{س} - \vec{ص}$ ، $-٤\vec{س} + ٦\vec{ص}$ = ----

الحل

$جتا θ = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|} = \frac{(٣، -١، ٠) \cdot (-٤، ٦، ٠)}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٥٢}}$

$جتا θ = \frac{-١٢ - ٦}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٥٢}}$ shift cos

$∴ θ = ١٤٢° \; ٧' \; ٣٠''$

---

(٧) إذا كان $\vec{أ} = (ك، ٣، -١)$ ، $\vec{ب} = (٢، -٣، -ك)$ متعامدان

فإن قيمة ك = ----

الحل

شرط التعامد $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ٠$

$∴ ٢ك - ٩ - ك = ٠$

$∴ ك = ٩$

---

(٨) فإن ك = ----

$\vec{أ} = (١، ٢، -١)$ ، $\vec{ب} = (٦، ك، ٠)$ ، $\vec{ج} = (٤، ٠، ٢\sqrt{٢})$

الحل

يتضح أن

قياس الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ = قياس الزاوية بين $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$

$جتا θ_{أ، ب} = جتا θ_{ب، ج}$

$\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|} = \frac{\vec{ب} \cdot \vec{ج}}{\|\vec{ب}\| \, \|\vec{ج}\|}$

$\frac{٦ + ٢ك}{\sqrt{٦}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٢٤}}$

$∴ ٦ + ٢ك = \frac{٢٤\sqrt{٦}}{\sqrt{٢٤}}$

$∴ ٦ + ٢ك = ١٢$

$∴ ٢ك = ١٢ - ٦$ $\quad ∴ ٢ك = ٦$

$∴ ك = ٣$

٩ في الشكل المقابل

إذا كان

$\|\overrightarrow{ب جـ}\| = \sqrt{٦}$ ، $\|\overrightarrow{أ جـ}\| = \|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{٢}$ ، $\overrightarrow{ب أ} = (-١ ، ٥ ، ١)$

فإن $\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب جـ} = \ldots\ldots$

الحل

$\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب جـ} = \|\overrightarrow{ب أ}\| \|\overrightarrow{ب جـ}\|$ جتا ب

$\because \|\overrightarrow{ب أ}\| = \sqrt{٢}$

من قاعدة جيب التمام

$$جتا ب = \frac{أ^٢ + جـ^٢ - ب^٢}{٢ أ جـ}$$

$$جتا ب = \frac{٦ + ٢ - ٢}{٢ \times \sqrt{٦} \times \sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\therefore \overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب جـ} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٦} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

---

١٠ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ١ ، ٢)$

فإن المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ـــــــ

الحل

$$\left(\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|^٢}\right) \overrightarrow{ب}$$

$$= \frac{-٢ - ٢ + ٢}{٩} \times (-٢ ، ١ ، ٢)$$

$$= \frac{-٢}{٩} (-٢ ، ١ ، ٢)$$

$$= \left(\frac{٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٤}{٩}\right)$$

---

١١ مخروط دائري قائم

محيط قاعدته = ١٢π سم

فإن $\overrightarrow{ب جـ} \cdot \overrightarrow{جـ و} = \ldots\ldots$

الحل

$\overrightarrow{ب جـ} = جـ - ب$

$\overrightarrow{جـ و} = و - جـ$

$\because$ محيط القاعدة = ٢π نق

$\therefore ٢π$ نق $= ١٢π$

$\therefore$ نق = ٦ سم

م و = ٨ سم

و جـ = ٥

جـ (٠ ، -٣ ، ٤)

$\therefore \overrightarrow{ب جـ} = (٠ ، -٣ ، ٤) - (٠ ، ٦ ، ٠)$

$= (٠ ، -٩ ، ٤)$

$\overrightarrow{جـ و} = (٠ ، ٠ ، ٠) - (٠ ، -٣ ، ٤)$

$= (٠ ، ٣ ، -٤)$

$\therefore \overrightarrow{ب جـ} \cdot \overrightarrow{جـ و} = (٠ ، -٩ ، ٤) \cdot (٠ ، ٣ ، -٤)$

$٠ - ٢٧ - ١٦ = -٤٣$

١٢ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢\,جتا\,\theta ،\ \log_2 س ،\ جا\,\theta)$ ، $\overrightarrow{ب} = (جتا\,\theta ،\ \log_5 ٢٧ ،\ ٢\,جا\,\theta)$

وكان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ١١$ فأوجد قيمة س ....

الحل

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٢\,جتا^2\theta + \log_2 س \times \log_5 ٢٧ + ٢\,جا^2\theta$

$٢(جتا^2\theta + جا^2\theta) + \log_2 س \times \log_5 ٢٧ = ١١$

$٢ + \log_2 س \times \log_5 ٢٧ = ١١$

$\therefore \log_2 س \times \log_5 ٢٧ = ٩$

$\log_2 س = ٩ \times \log_{٢٧} ٥$

$\therefore س = ٢^{(٩ \times \log_{٢٧} ٥)}$

$\therefore س = ٢١{,}٠٤$

١٣

في الشكل المقابل أوجد $\overrightarrow{ءب} \cdot \overrightarrow{هـأ}$

الحل

$\overrightarrow{بء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{ب} = (٠ ، ٠ ، ٦) - (٤ ، ٨ ، ٦)$

$= (-٤ ، -٨ ، ٠)$

$\overrightarrow{هـأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{هـ} = (٠ ، ٨ ، ٦) - (٤ ، ٠ ، ٦)$

$= (-٤ ، ٨ ، ٠)$

$\therefore \overrightarrow{ءب} \cdot \overrightarrow{هـأ} = (-٤ ، -٨ ، ٠) \cdot (-٤ ، ٨ ، ٠)$

$= ١٦ - ٦٤ = -٤٨$

١٤ إذا كان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{جـ}$ وكان

$\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (١ ، ٢ ، ١)$

وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٤\sqrt{٢}$ فإن $\overrightarrow{أ} = ...$

الحل

نفرض أن أ (س ، ص ، ع) $\because \overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{جـ}$

$\therefore ٢س + ٣ص + ٢ع = ٠$

$س + ٢ص + ع = ٠$ (× -٢ والجمع)

$-٢س - ٤ص - ٢ع = ٠$

$٢س + ٣ص + ٢ع = ٠$

$-ص = ٠ \quad \therefore ص = ٠$

$٢س + ٣ص + ٢ع = ٠$

$س + ع = ٠ \quad \therefore س = -ع$

∴ الاختيار الصحيح (-٤ ، ٠ ، ٤)

(٢ ، ٣ ، ١) ، **(-٤ ، ٠ ، ٤)** ، (٤ ، ٤ ، ٠) ، (٠ ، -٤ ، ٤)

الدرس الرابع
الضرب الاتجاهي والثلاثي القياسي

① $\vec{A} \times \vec{B} = (\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \, جا هـ) \, \vec{ى}$

② $\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$

③ $جا هـ = \dfrac{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}{\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\|}$

④ متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A} \times \vec{B}$ هو $\dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}$ المتجه / معياره

⑤
$\vec{س} \times \vec{ص} = \vec{ع}$

$\vec{ص} \times \vec{ع} = \vec{س}$

$\vec{ع} \times \vec{س} = \vec{ص}$

⑥ شرط توازي متجهين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

(أ) $\vec{A} = ل \, \vec{B}$

(ب) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

(ج) $\dfrac{أ_س}{ب_س} = \dfrac{أ_ص}{ب_ص} = \dfrac{أ_ع}{ب_ع}$

⑦ إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط في الفراغ وكان

* $\vec{أب} \times \vec{بجـ} = \vec{0}$ فإن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

* $\vec{أب} \parallel \vec{بجـ}$ فإن أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

⑧ المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي

(أ) = مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ضلعان متجاوران.

(ب) = ضعف مساحة $\triangle$ الذي فيه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ضلعان.

⑨ لاحظ أن مساحة $\triangle = \frac{1}{2}$ طول الضرب الاتجاهي لمتجهي ضلعين.

⑩ المعنى الهندسي للضرب الثلاثي القياسي = حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ تمثلها.

$\vec{س} \times \vec{س} = \vec{0}$ لأن جا ٠ = صفر

وكذلك $\vec{س} \cdot \vec{س} = 1$ ضرب قياسي لأن جتا ٠ = ١

أوجد أ × ب فى الحالات الآتية

١) ||أ|| = ٦ ، ||ب|| = ٨ ، هـ = ٣٠°

الحل

أ × ب = (||أ|| ||ب|| جا هـ) ى

= ٦ × ٨ × جا ٣٠ = ٢٤ ى

---

٢) أ = (-٢ ، ٣ ، ١) ، ب (١ ، ٣ ، -٤)

الحل

أ × ب = | س ص ع ; -٢ ٣ ١ ; ١ ٣ -٤ |

= (-١٢-٣) س - (٨-١) ص + (-٦-٣) ع

= -١٥ س - ٧ ص - ٩ ع

---

٣) إذا كان ||أ|| = ٦ وكانت جيوب تمام اتجاه أ هى $\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ وكان ب = (-٢ ، ٣ ، ٥) أوجد أ × ب

الحل

أ = ||أ|| ى أ = ٦ ($\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$)

لاحظ أن المتجه = متجه الوحدة × معياره

أ = (٤ ، -٤ ، ٢)

أ × ب = | س ص ع ; ٤ -٤ ٢ ; -٢ ٣ ٥ |

= س (-٢٠-٦) - ص (٢٠+٤) + ع (١٢-٨)

= -٢٦ س - ٢٤ ص + ٤ ع

---

٤) إذا كان أ × ب = -٦٥ ى وكان ||أ|| = ٥ ، ||ب|| = ٢٦ أوجد قياس الزاوية بين أ ، ب

الحل

جا هـ = $\frac{||أ × ب||}{||أ||\ ||ب||}$

جا هـ = $\frac{65}{5 \times 26}$ = $\frac{1}{2}$

∴ هـ = ٣٠° أو ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°

---

٥) إذا كان أ × ب = و ، أ . جـ = صفر فإن ب . جـ = ---

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ (د) ||ب||

الحل

∵ أ × ب = و ∴ أ // ب

أ . جـ = صفر ∴ أ ⊥ جـ

∴ ب ⊥ جـ

∴ ب . جـ = صفر

٦ إذا كان $\vec{A} = (1, 2, 1)$ ، $\vec{B} = (3, 1, 2)$

أوجد

(أ) $\vec{A} \times \vec{B}$

(ب) متجه وحدة عمودي على $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

الحل

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{s} & \vec{c} & \vec{e} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3\vec{s} + \vec{c} - 5\vec{e}$

نحوله لمتجه وحدة

$= \dfrac{(3, 1, -5)}{\sqrt{9+1+25}}$

∴ يوجد متجها وحدة في اتجاه عمودي على $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

هما $\pm \dfrac{1}{\sqrt{35}} (3, 1, -5)$

---

٧ $\dfrac{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}{\vec{A} \cdot \vec{B}} = \text{-----}$

الحل

لاحظ أن $\sin\theta = \dfrac{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}{\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\|}$

∴ $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin\theta$

المطلوب $= \dfrac{\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin\theta}{\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \cos\theta} = \tan\theta$

---

٨ إذا كان $\vec{A} = (3, -2, k)$ ، $\vec{B} = (1, m, 2)$

وكان $\vec{A} \parallel \vec{B}$ فإن $k = \text{---}$ ، $m = \text{----}$

(٦) ، $\left(\frac{-2}{3}\right)$

الحل

$\dfrac{3}{1} = \dfrac{-2}{m} = \dfrac{k}{2}$

$m = \dfrac{1 \times -2}{3} = \dfrac{-2}{3}$

$k = \dfrac{2 \times 3}{1} = 6$

---

٩ إذا كان $\vec{A} = (-1, 2, 2)$ ، $\|\vec{B}\| = 6$ ، $\vec{A} \parallel \vec{B}$ أوجد $\vec{B}$

الحل

∵ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ ∴ $\vec{B} = k\vec{A}$

$\|\vec{B}\| = |k| \, \|\vec{A}\|$ $\qquad \|\vec{A}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$6 = |k| \, 3$

$|k| = 2$ ∴ $k = \pm 2$

∴ $\vec{B} = \pm 2(-1, 2, 2)$

$\vec{B} = (-2, 4, 4)$ أو $\vec{B} = (2, -4, -4)$

---

١٠ أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه

ل $(1, 1)$ ، م $(2, 3)$ ، ن $(5, 4)$

الحل

(شكل: متوازي أضلاع رءوسه ل ، م ، ن)

$\vec{LM} = \vec{M} - \vec{L} = (1, 2)$

$\vec{NM} = \vec{M} - \vec{N} = (-3, -1)$

∴ $\vec{LM} \times \vec{NM} = (1, 2) \times (-3, -1)$

$= (-1 + 6)\vec{e} = 5\vec{e}$

$= 5$ وحدة مساحة

(١١) أوجد مساحة △ أ ب جـ الذى فيه

أ (٤ ، ٠ ، ٢) ب (٢ ، ١ ، ٥)

جـ (−١ ، ٠ ، −١)

الحل

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٢ ، ١ ، ٣)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (-٥ ، ٠ ، -٣)$

$\therefore \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٢ & ١ & ٣ \\ -٥ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$

$= -٣\overrightarrow{س} - ٢١\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

مساحة △ $= \frac{١}{٢}\sqrt{٩ + (٢١)^٢ + ٢٥}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{٤٧٥}$ وحدة مربعة

(١٢) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية يمثلها المتجهات

$\overrightarrow{أ} (٣ ، -٤ ، ١)$ $\overrightarrow{ب} (٠ ، ٢ ، -٣)$

$\overrightarrow{جـ} (٣ ، ٢ ، ٢)$

الحل

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ٣(٤ + ٦) + ٤(٠ + ٩) + (٠ - ٦)$

$= ٣٠ + ٣٦ - ٦ = ٦٠$ وحدة حجم

(١٣) اثبت أنه

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^٢ + \|\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}\|^٢ = \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢$

الحل

الأيمن $= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢ (جا^٢ θ) + \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢ جتا^٢ θ$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢ (جا^٢ θ + جتا^٢ θ)$

$= \|\overrightarrow{أ}\|^٢ \|\overrightarrow{ب}\|^٢ =$ الأيسر

(١٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

فإنه إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

الحل

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠ \quad \therefore \overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ أو أحدهما $\overrightarrow{و}$ (١)

$\because \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و} \quad \therefore \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ أو أحدهما $\overrightarrow{و}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

الوحدة الثانية

الدرس الأول : معادلات المستقيم في الفراغ

① الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

المار بالنقطة $أ = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

ومتجه اتجاهه $\overrightarrow{هـ} = (أ ، ب ، جـ)$

① الصورة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك \overrightarrow{هـ}$

② المعادلات البارامترية

$س = س_١ + ك أ$

$ص = ص_١ + ك ب$

$ع = ع_١ + ك جـ$

③ الصورة الإحداثية

$$\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$$

④ معادلة محور س ص ← ص = ٠ ، ع = ٠

⑤ معادلة المستقيم المار بـ(أ ، ب ، جـ) موازياً لمحور س

ص ← ص = ب ، ع = جـ

في كل من المعادلات التالية أوجد النقطة أ ومتجه الاتجاه $\overrightarrow{هـ}$

---

①
$$\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{٥} = \frac{ع - ٢}{٤}$$

النقطة $أ = (١ ، -٣ ، ٢)$

$\overrightarrow{هـ} = (٢ ، ٥ ، ٤)$

②
$$س + ٢ = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع}{٧}$$

$أ (-٢ ، ١ ، ٠)$

$\overrightarrow{هـ} (١ ، ٣ ، ٧)$

③
$$\frac{٢س - ٤}{٦} = \frac{ص - ٣}{-٢} = \frac{ع + ١}{٥}$$

نضبطها

$$\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص - ٣}{-٢} = \frac{ع + ١}{٥}$$

$أ (٢ ، ٣ ، -١)$

$\overrightarrow{هـ} (٣ ، -٢ ، ٥)$

٤ س = ص − ١ ، ع = ٣

الحل

$\frac{\text{س} - ٠}{١} = \frac{\text{ص} - ١}{١}$ ، ع = ٣ + (٠)ل

النقطة أ (٠ ، ١ ، ٣)

ه = (١ ، ١ ، ٠)

---

٥ $\frac{٢\text{س} - ١}{٣} = \frac{-\text{ع} + ٧}{٢}$ ، ص = ٢

الحل

$\frac{\text{س} - \frac{١}{٢}}{\frac{٣}{٢}} = \frac{\text{ع} - ٧}{-٢}$ ، ص = ٢ + ل × ٠

النقطة أ (½ ، ٧ ، ٢)

ه (٣/٢ ، −٢ ، ٠)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

٦ المار بنقطة الأصل والمتجه (−٢ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه له

الحل

أ (٠ ، ٠ ، ٠)   ه = (−٢ ، ٣ ، ١)

المعادلة المتجهة

ر = ل (−٢ ، ٣ ، ١)

المعادلة البارامترية :

س = −٢ل ، ص = ٣ل ، ع = ل

المعادلة الكارتيزية

$\frac{\text{س}}{-٢} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{\text{ع}}{١}$

---

٧ المار بالنقطتين (٢ ، −١ ، ٥) ، (−٣ ، ١ ، ٤)

الحل

متجه الاتجاه أب = ب − أ

= (−٣ ، ١ ، ٤) − (٢ ، −١ ، ٥) = (−٥ ، ٢ ، −١)

المعادلة المتجهة

ر = (−٣ ، ١ ، ٤) + ل (−٥ ، ٢ ، −١)

المعادلة البارامترية

س = −٣ − ٥ل   ص = ١ + ٢ل

ع = ٤ − ل

∴ المعادلة الكارتيزية

$\frac{\text{س} + ٣}{-٥} = \frac{\text{ص} - ١}{٢} = \frac{\text{ع} - ٤}{-١}$

---

٨ المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية

الحل

جتا²θس + جتا²θص + جتا²θع = ١

٣ جتا²θ = ١

جتا²θ = $\frac{١}{٣}$ جتاθ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ موجبة فقط

∴ متجه الاتجاه هو ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

وهنا هنستخدم الاختصار ه = (١ ، ١ ، ١)

تعرف تكمل انت الحل ؟

٩ أوجد معادلة المتماثلة

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{٢ص-١}{٥} = \frac{٣ع+٢}{٤}$$

الحل

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{ص-\frac{١}{٢}}{\frac{٥}{٢}} = \frac{ع+\frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٣}}$$

أ $(-٣، \frac{١}{٢}، -\frac{٢}{٣})$

$\vec{ى} = (٢، \frac{٥}{٢}، \frac{٤}{٣})$

$\vec{ر} = (-٣، \frac{١}{٢}، -\frac{٢}{٣}) + ك(٢، \frac{٥}{٢}، \frac{٤}{٣})$

أكمل انت

---

١٠ المار بالنقطة (٣، ٤، ١) موازياً لمحور س

الحل

الفكرة $\vec{أ} = (٣، ٤، ١)$

$\vec{ى} = (١، ٠، ٠)$ ← متجه اتجاه محور س

أكمل الحل

---

١١ المار بالنقطة (-٣، ٤، ٥) وزوايا الاتجاه له (٣٠°، ٩٠°، ٦٠°)

الحل

متجه الوحدة له = (جتا ٣٠، جتا ٩٠، جتا ٦٠)

$\vec{ى} = (\frac{\sqrt{٣}}{٢}، ٠، \frac{١}{٢})$

أكمل الباقى

---

١٢ المار بنقطة الأصل وتنسب الاتجاه له ٢، -١، ٧ ثم أوجد احداثيات نقطة عليه

الحل

$\vec{ر} = ك(٢، -١، ٧)$ المتجهة

البارامترية

س = ٢ك ص = -ك ع = ٧ك

الاحداثية

$$\frac{س}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع}{٧}$$

لإيجاد نقطة عليه

نضع ك = ١ أو ٢ أو ٣ مثلاً

عند ك = ١

النقطة (٢، -١، ٧)

---

١٣ النقطة التى تقع على المستقيم

$\vec{ر} = (٢، -١، ٣) + ك(١، ٢، -١)$

هى ....

(أ) (١، ١، ١) (ب) (٠، ٢، -٢)

(ج) (٣، ١، ٢) (د) (٤، -٣، ٠)

عوض عن ك = ١ فلاقى النقطة

---

١٤ جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين

(٤، ٣، -٥)، (-٢، ١، -٨)

(أ) (٦، ٢، ٣) (ب) (٢، ٤، -١٣)

(ج) $(\frac{٦}{٧}، \frac{٢}{٧}، \frac{٣}{٧})$ (د) $(\frac{١}{٢}، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}، ٠)$

هنطرحهم ونقول متجه وحدة

تعامل مع المستقيم في الفراغ يكون من خلال متجه الاتجاه $\vec{h}$
هنستخدمه في إيجاد الزاوية
وفي شرط التوازي والتعامد
وفي إيجاد زاوية بين المستقيم والمحاور
وأي شيء هيكون من خلال $\vec{h}$

(١) قياس الزاوية بين مستقيمين في الفراغ

$$جتا\,\theta = \frac{|\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2|}{\|\vec{h}_1\|\,\|\vec{h}_2\|}$$

✳ لاحظ انه في حالة أعطاك جيوب تمام الزاوية وجيوب تمام الثاني هتعوض فقط ومش هتقسم لأن طولها = ١

أوجد قياس الزاوية بين

(٢) المستقيمين اللذين نسب الاتجاه لهما $(1, 1, 2)$ ، $(1, 1, 4)$

الحل

$$جتا\,\theta = \frac{|1 + 1 + 8|}{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+16}} = \frac{10}{\sqrt{18 \times 6}}$$

$$\therefore \theta = 15^\circ\ 47'\ 35''$$

(٣) بين المستقيمين $\vec{r}_1 = (-2, 5, -7) + k(-6, 6, 8)$ ، $\vec{r}_2 = (1, -2, 3) + k'(4, 12, -6)$

الحل

$\vec{h}_1 = (-6, 6, 8)$ $\vec{h}_2 = (4, 12, -6)$

$$جتا\,\theta = \frac{|-24 + 72 - 48|}{\sqrt{36 + 36 + 64} \times \sqrt{16 + 144 + 36}} = صفر$$

$\therefore \theta = 90^\circ$ متعامدان

(٤) $2س = 3ص = -ع$ ، $6س = -ص = -4ع$

الحل

$\div 6$ $\div 12$

$$\frac{س}{3} = \frac{ص}{2} = \frac{ع}{-6} \quad ، \quad \frac{س}{2} = \frac{ص}{-12} = \frac{ع}{-3}$$

$\vec{h}_1 = (3, 2, -6)$ $\vec{h}_2 = (2, -12, -3)$

$$جتا\,\theta = \frac{|6 - 24 + 18|}{\|\vec{h}_1\|\,\|\vec{h}_2\|} = صفر$$

$\therefore \theta = 90^\circ$

(٥) قياس الزاوية بين المستقيم

$$\frac{س - 1}{\sqrt{2}} = \frac{ص - \sqrt{2}}{1} = \frac{ع + 1}{1}$$

مع الاتجاه الموجب لمحور ع

الحل

$\vec{h} = (\sqrt{2}, 1, 1)$

هنجيب متجه وحدة ونوجد جتا ع

$$\frac{(\sqrt{2}, 1, 1)}{\sqrt{2+1+1}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

∴ جتا $\theta_٣ = \frac{1}{2}$

∴ $\theta_٣ = 60°$

٦ إذا كان قياس الزاوية بين

$\frac{س}{أ} = \frac{ص}{2} = \frac{ع}{1}$ ، $\frac{س}{2} = \frac{ص}{1} = \frac{ع}{-1}$

هو ٦٠° فإن قيمة أ = ...

الحل

$\overrightarrow{ه_1} = (أ, 2, 1)$ $\overrightarrow{ه_2} = (2, 1, -1)$

$$\frac{|2أ + 2 - 1|}{\sqrt{أ^2+4+1} \times \sqrt{4+1+1}} = جتا 60° = \frac{1}{2}$$

$2أ + 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{أ^2+5}$ ×٢

بتربيع الطرفين

$(4أ + 2)^2 = (\sqrt{6}\sqrt{أ^2+5})^2$

$16أ^2 + 16أ + 4 = 6(أ^2+5)$

$16أ^2 + 16أ + 4 = 6أ^2 + 30$

$10أ^2 + 16أ - 26 = 0$

∴ أ = ١ أو أ = $\frac{-13}{5}$

٧ من الشكل المقابل

$ل_1$: س = ٠ ، ص = ع

، $ل_2$: ص = ٠ ، س = ع

جا θ = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١٣٥° (ج) ١٥٠° (د) ١٦٥°

$\overrightarrow{ه_1} = (0, 1, 1)$ $\overrightarrow{ه_2} = (1, 0, 1)$

$$جتا \theta_{الصغرى} = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

∴ $\theta_{الصغرى} = 60°$

∴ $\theta_{المطلوبة} = 180° - 60° = 120°$

١ شرط توازي مستقيمين

$\overrightarrow{ه_1} \times \overrightarrow{ه_2} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{ه_1} = ك \overrightarrow{ه_2}$

$\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

٢ شرط تعامد مستقيمين

$\overrightarrow{ه_1} \cdot \overrightarrow{ه_2} = 0$ $أ_1أ_2 + ب_1ب_2 + جـ_1جـ_2 = 0$

٣ المستقيمان المتوازيان إذا اشتركا في نقطة فإنهما منطبقان

٤ المستقيمان المتوازيان والمتقاطعان يجمعهما مستوى واحد

٥ المستقيمان المتعامدان إما

متقاطعان أو متخالفان

⑧ إذا كان $\vec{م} = (-٢ ، ك ، -٣)$ يوازي متجه اتجاه المستقيم

$$\frac{س+٢}{٤} = \frac{ص}{٨} = \frac{ع-١}{٦}$$

فأوجد قيمة ك

الحل

$\vec{هـ}_١ = (-٢ ، ك ، -٣)$ ، $\vec{هـ}_٢ = (٤ ، ٨ ، ٦)$

$$\frac{-٢}{٤} = \frac{ك}{٨} = \frac{-٣}{٦}$$

$$ك = \frac{-٢ \times ٨}{٤} = -٤$$

---

⑨ إذا كان $\frac{س+٢}{٦} = \frac{ص-١}{ك} = \frac{ع-١}{٣}$

عمودياً على المستقيم

$$\frac{س-٩}{-٢} = \frac{ص+٨}{١} ، ع = ٣$$

فإن ك = ...

الحل

$\vec{هـ}_١ = (٦ ، ك ، ٣)$ ، $\vec{هـ}_٢ = (-٢ ، ١ ، ٠)$

$-١٢ + ك + ٠ = ٠$ شرط التعامد

∴ $ك = ١٢$

لإيجاد نقطة التقاطع ⟵

$$\vec{ر}_١ = \vec{ر}_٢$$

---

⑩ اثبت أن المستقيمين

$$\vec{ر}_١ = \vec{ص} + ك_١(\vec{س} + ٢\vec{ص} - \vec{ع})$$

$$\vec{ر}_٢ = (\vec{س} + \vec{ص} + \vec{ع}) + ك_٢(-٢\vec{س} - ٢\vec{ص})$$

متقاطعان في نقطة وأوجد نقطة تقاطعهما

الحل

عند نقطة التقاطع $\vec{ر}_١ = \vec{ر}_٢$

$$(٠ ، ١ ، ٠) + ك_١(١ ، ٢ ، -١) = (١ ، ١ ، ١) + ك_٢(-٢ ، -٢ ، ٠)$$

$ك_١ = ١ - ٢ك_٢$

∴ $ك_١ + ٢ك_٢ = ١$ ⟵ ①

في الجزء الثالث من النقط

$-ك_١ = ١$ ⟵ ② ∴ $\boxed{ك_١ = -١}$

في ① $٢ك_٢ = ١ + ١$

∴ $\boxed{ك_٢ = ١}$

ومن تحقق المعادلة ②

$١ + ٢ك_١ = ١ - ٢ك_٢$ ⟵ ③

$١ - ٢ = ١ - ٢$ تمام كده فورى

∴ المستقيمان متقاطعان في النقطة

$$(٠ ، ١ ، ٠) - (١ ، ٢ ، -١) = (-١ ، -١ ، ١)$$

على فكرة إذا ك١، ك٢ لم تحقق المعادلة الثالثة فإن المستقيمان متخالفان وغير متقاطعان

(١١) أثبت أن المستقيمين

$\vec{ر}_1 = (١ ، ٢ ، ٤) + ك_1 (٢ ، -١ ، ١)$

$\vec{ر}_2 = (١ ، ١ ، ١) + ك_2 (-٢ ، ٧ ، ١١)$

متعامدان ثم اثبت انهما متخالفان

الحل

$\vec{ه}_1 = (٢ ، -١ ، ١)$ $\vec{ه}_2 = (-٢ ، ٧ ، ١١)$

$\vec{ه}_1 \cdot \vec{ه}_2 = -٤ - ٧ + ١١ = ٠$

∴ متعامدان

عند نقطة التقاطع فرضاً يكون $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

$١ + ٢ك_1 = ١ - ٢ك_2$

$٢ك_1 + ٢ك_2 = ٠$ ← $ك_1 + ك_2 = ٠$ (١)

$٢ - ك_1 = ١ + ٧ك_2$

$-ك_1 - ٧ك_2 = ١ - ٢$ ← $-ك_1 - ٧ك_2 = -١$ (٢)

$٤ + ك_1 = ١ + ١١ك_2$ ← $ك_1 - ١١ك_2 = -٣$ (٣)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) بالجمع

$-٦ك_2 = -١$ ∴ $ك_2 = \frac{١}{٦}$

ومنها $ك_1 = \frac{-١}{٦}$

بالتعويض في (٣)

$\frac{-١}{٦} - ١١ \times \frac{١}{٦} \neq -٣$ لا تحقق المعادلة (٣)

∴ المستقيمان متعامدان ومتخالفان

ولو مش مصدق اسأل

المسافة بين نقطة ومستقيم في الفراغ

بعد النقطة ب عن المستقيم $\vec{ر} = \vec{أ} + ك \vec{ه}$

$$= \frac{\| \vec{أب} \times \vec{ه} \|}{\| \vec{ه} \|}$$

(١٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، -٤) على المستقيم

$\vec{ر} = (١ ، -١ ، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، -٢)$

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٢ ، ١ ، -٤) - (١ ، -١ ، ٢)$

$= (-١ ، -٢ ، ٦)$

$$\vec{أب} \times \vec{ه} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & -٢ & ٦ \\ ٢ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

$= (٤ - ١٨) \vec{س} - (٢ - ١٢) \vec{ص} + (-٣ + ٤) \vec{ع}$

$= -١٤ \vec{س} + ١٠ \vec{ص} + \vec{ع}$

$$\text{طول العمود} = \frac{\sqrt{(١٤)^2 + (١٠)^2 + (١)^2}}{\sqrt{(٢)^2 + (٣)^2 + (-٢)^2}}$$

≃ ٤٫١٨ وحدة طول

① الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ (س١، ص١، ع١) والمتجه ن = (أ، ب، جـ) عمودي عليه.

أ) ن . ر = ن . أ   الصورة المتجهة

ب) الصورة القياسية

أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

جـ) الصورة العامة

أس + ب ص + جـ ع + د = ٠

حيث د = − ن . أ

② كيفية تعيين المستوى في الفراغ

ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

مستقيمان متقاطعان

مستقيمان متوازيان وغير منطبقين

مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه

① أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢، −٣، ١) والمتجه ن = (١، −٢، ٣) عمودي عليه.

الحل

أ (٢، −٣، ١)   ن = (١، −٢، ٣)

ن . أ = ٢ + ٦ + ٣ = ١١

الصورة المتجهة

ن . ر = ن . أ

(١، −٢، ٣) . ر = ١١

الصورة القياسية

١(س − ٢) − ٢(ص + ٣) + ٣(ع − ١) = ٠

الصورة العامة

س − ٢ − ٢ص − ٦ + ٣ع − ٣ = ٠

س − ٢ص + ٣ع − ١١ = ٠

ملحوظة في الصورة العامة

معامل (س، ص، ع) هو متجه عمودي على المستوى.

② أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط

أ(٢، −١، ٠)   ب(−١، ٣، ٤)

جـ(٣، ٠، ٢)

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = ٠$$

$$= \begin{vmatrix} س - ٢ & ص + ١ & ع \\ -٣ & ٤ & ٤ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$(س - ٢)(٨ - ٤) - (ص + ١)(-٦ - ٤) + ع(-٣ - ٤) = ٠$

$\therefore$ $٤(س - ٢) + ١٠(ص + ١) - ٧ع = ٠$ الصورة القياسية

$٤س - ٨ + ١٠ص + ١٠ - ٧ع = ٠$

$٤س + ١٠ص - ٧ع + ٢ = ٠$ الصورة العامة

$(٤ ، ١٠ ، -٧) \cdot \vec{ر} = -٢$ الصورة المتجهة

اختبر

١ معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودي عليه

(أ) $٢س + ص + ٣ع = ١$

(ب) $٢س + ص + ٣ع = ١٥$

(ج) $س - ٢ص + ٥ع = ١٥$

(د) $س + ص + ع = ٤$

٢ معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازي محوري الاحداثيات س ، ص

(أ) $س + ص = ٣$ (ب) $ع = ٣$

(ج) $س = ١$ (د) $ص = ٢$

٣ معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (-١ ، ١ ، ٣) ، (٤ ، ٣ ، -٢) هي ...

(أ) $س + ص - ع = ٠$ (ب) $س = -١$

(ج) $ص = ٣$ (د) $ع = -٢$

٤ معادلة المستوى الموازي لمحور س هو ...

(أ) $أس + حـ ع + د = ٠$

(ب) $ب ص + حـ ع + د = ٠$

(ج) $أس + ب ص + د = ٠$

(د) $أس + ب ص + حـ ع + د = ٠$

٥ المعادلة $٣ص + ٤ع = ٠$ تمثل ...

(أ) مستوى يحوي محور ع

(ب) مستوى يحوي محور س

(ج) مستوى يحوي محور ص

(د) مستقيم متجه اتجاهه (٠ ، ٣ ، ٤)

٦ المستوى $٣س - ٢ص + ٤ع = ١٢$ يقطع من محور س جزءاً طوله ...

(أ) ٣ (ب) -٤ (ج) ٤ (د) ٦

$$\frac{٣س}{١٢} - \frac{٢ص}{١٢} + \frac{٤ع}{١٢} = ١$$

$$\frac{س}{٤} - \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$$

يقطع من محور س ٤ وحدات

ومن محور ص ٦ وحدات

(٧) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ص − ٦ع = ٣٠ هي أ ، ب ، جـ فإن أ + ب + جـ = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٣١ (د) ٤١

الحل

$$\frac{\text{س}}{30} + \frac{5\text{ص}}{30} + \frac{-6\text{ع}}{30} = 1$$

$$\frac{\text{س}}{30} + \frac{\text{ص}}{6} + \frac{\text{ع}}{-5} = 1$$

٣٠ + ٦ − ٥ = ٣١ أي جـ

---

(٨) إذا مر المستوى ٢أس − ٣أص + ٤أع + ٦ = ٠

بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الكرتين س² + ص² + ع² + ٦س − ٨ص − ٢ع = ١٣ ، س² + ص² + ع² − ١٠س + ٤ص − ٢ع = ٨ فما قيمة أ ؟

الحل

م١ = (−٣ ، ٤ ، ١) ، م٢ = (٥ ، −٢ ، ١)

المنتصف = $\left(\frac{-3+5}{2} , \frac{4-2}{2} , \frac{1+1}{2}\right)$

= (١ ، ١ ، ١)

بالتعويض في معادلة المستوى

٢أ − ٣أ + ٤أ + ٦ = ٠

٣أ + ٦ = ٠

٣أ = −٦

∴ أ = −٢

---

(٩) إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع في النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب. احسب مساحة △ أ ب جـ

الحل

$$\frac{3\text{س}}{12} + \frac{2\text{ص}}{12} + \frac{4\text{ع}}{12} = 1$$

$$\frac{\text{س}}{4} + \frac{\text{ص}}{6} + \frac{\text{ع}}{3} = 1$$

أ (٤ ، ٠ ، ٠) ب (٠ ، ٦ ، ٠)

جـ (٠ ، ٠ ، ٣)

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-4 , 6 , 0)$

$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-4 , 0 , 3)$

$$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ -4 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 18\,\hat{\text{س}} + 12\,\hat{\text{ص}} + 24\,\hat{\text{ع}}$$

∴ مساحة △ = $\frac{1}{2} \times \sqrt{(18)^2 + (12)^2 + (24)^2}$

= $3\sqrt{29}$ وحدة مربعة

١٠ اثبت أن المستقيم

$ل_١$: ٢س = ٣ص = ٤ع ÷ ١٢

$ل_٢$: ٣س = ٢ص = ٥ع ÷ ٣٠

متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

الحل

$\frac{٢س}{١٢} = \frac{٣ص}{١٢} = \frac{٤ع}{١٢}$

$\frac{س}{٦} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٣}$

$\overrightarrow{ه_١}$ (٦، ٤، ٣) ويمر بالنقطة (٠، ٠، ٠)

$\frac{٣س}{٣٠} = \frac{٢ص}{٣٠} = \frac{٥ع}{٣٠}$

$\frac{س}{١٠} = \frac{ص}{١٥} = \frac{ع}{٦}$

$\overrightarrow{ه_٢}$ = (١٠، ١٥، ٦) ويمر بالنقطة (٠، ٠، ٠)

∴ المستقيمان يمران بنقطة الأصل (٠، ٠، ٠)

فهما متقاطعان

نوجد متجه عمودى على $ل_١$، $ل_٢$ من الضرب الاتجاهى

$$\overrightarrow{ه_١} \times \overrightarrow{ه_٢} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix}$$

= (٢٤ - ٤٥) $\overrightarrow{س}$ - (٣٦ - ٣٠) $\overrightarrow{ص}$ + (٩٠ - ٤٠) $\overrightarrow{ع}$

= - ٢١ $\overrightarrow{س}$ - ٦ $\overrightarrow{ص}$ + ٥٠ $\overrightarrow{ع}$

معادلة المستوى هى

أ س + ب ص + جـ ع + د = ٠

- ٢١ س - ٦ ص + ٥٠ ع = ٠

د = ٠ لأنه يمر بنقطة الأصل

١١ أوجد معادلة المستوى الذى يحوى المستقيم $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٣، -٥) + ك (٦، -٢، -١)

ويوازى $ل_٢$: $\overrightarrow{ر}$ = (١، ٧، -٤) + ك (١، -٣، ٣)

الحل

النقطة أ (٠، ٣، -٥) لأنه يحوى المستقيم

$\overrightarrow{ه_١}$ = (٦، -٢، -١) $\overrightarrow{ه_٢}$ = (١، -٣، ٣)

نوجد المتجه العمودى عليهما $\overrightarrow{ه_١} \times \overrightarrow{ه_٢}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٦ & -٢ & -١ \\ ١ & -٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{ن}$ = (-٩، -١٩، -١٦)

$\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

(-٩، -١٩، -١٦) . $\overrightarrow{ر}$ = (٠، ٣، -٥) . (-٩، -١٩، -١٦)

-٩ س - ١٩ ص - ١٦ ع - ٢٣ = ٠

١٢ أوجد معادلة المستوى المار بـ (٢، ١، ٤) ويوازى المستوى ٢س + ٣ص + ٥ع = ١

الحل

لاحظ أن المستوى المطلوب موازى للمعلوم

∴ العمودى عليهما هو نفسه (٢، ٣، ٥)

وعندك النقطة (٢، ١، ٤) وأكمل انت

(١٣) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى س + ٢ص + ٣ع = ١٢

الحل

نفرض أن س = ص = ع = ك

بالتعويض في معادلة المستوى

ك + ٢ك + ٣ك = ١٢ ، ٦ك = ١٢

∴ ك = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٢ ، ٢)

---

(١٤) أوجد نقطة تقاطع المستقيم ر = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢) مع المستوى (٣ ، ٢ ، ٢) · ر = -٢

الحل

بالتعويض عن ر في معادلة المستوى

(٣ ، ٢ ، ٢) · [(١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢)] = -٢

(٣ ، ٢ ، ٢) · (١ + ٣ك ، ٤ + ٢ك ، ٢ + ٢ك) = -٢

٣ + ٩ك + ٨ + ٤ك + ٤ + ٤ك = -٢

١٧ك = -٢ - ١٥

١٧ك = -١٧ ∴ ك = -١

∴ نقطة التقاطع

(١ ، ٤ ، ٢) - (٣ ، ٢ ، ٢) = (-٢ ، ٢ ، ٠)

---

(١٥) أوجد نقطة تقاطع المستويات

٢س + ص - ع = -١ ← (١)

س + ص + ع = ٢ ← (٢)

٣س - ص - ع = ٦ ← (٣)

الحل

بحل (٢) ، (٣) بالجمع

٤س = ٨ ∴ س = ٢

بحل (١) ، (٢) بالجمع

٣س + ٢ص = ١

٦ + ٢ص = ١

٢ص = ١ - ٦ ، ٢ص = -٥

∴ ص = -٥/٢

بالتعويض في (١)

٤ - ٥/٢ - ع = -١

ع = ٤ - ٥/٢ + ١ ، ع = ٥/٢

∴ نقطة التقاطع (٢ ، -٥/٢ ، ٥/٢)

---

(١٦) أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص - ١ = ع - ٤ مع المستوى ٣س + ص - ٢ع = ٥

الحل

٢س = ٣ص - ١ = ع - ٤ = ك

٢س = ك ، س = ك/٢

٣ص = ك + ١ ، ص = (ك + ١)/٣

ع = ك + ٤

بالتعويض فى معادلة المستوى

$٣(\frac{ل}{٢}) + \frac{ل+١}{٣} - ٢(ل+٤) = ٥$ × ٦

$٩ل + ٢ل + ٣ - ١٢ل - ٤٨ = ٣٠$

$- ل = ٣٠ + ٤٦$

∴ $ل = -٧٦$

∴ $س = \frac{-٧٦}{٢} = -٣٨$

$ص = \frac{-٧٦+١}{٣} = -٢٥$

$ع = -٧٦+٤ = -٧٢$

∴ نقطة التقاطع $(-٣٨ ، -٢٥ ، -٧٢)$

(١٧) عين وضع كل من النقط $أ(-٣ ، ٣ ، ٥)$ ، $ب(٦ ، ٥ ، ١)$ ، $ح(٦ ، -٥ ، ١)$ بالنسبة للمستوى $٢س - ٣ص + ٤ع - ٥ = ٠$

الحل

بالتعويض فى معادلة المستوى

$أ$: $-٦ - ٩ + ٢٠ - ٥ = ٠$ ∈ للمستوى

$ب$: $١٢ - ١٥ + ٤ - ٥ = -٤$ ∉ للمستوى

$ح$: $١٢ + ١٥ + ٤ - ٥ = ٢٦$ ∉ للمستوى

∴ ب ، ح لا تنتميان للمستوى وتقعان فى جهتين مختلفتين منه .

الزاوية بين المستقيم $\vec{هـ}$ والمستوى $\vec{ن}$

$= ٩٠° - θ$

$جتا θ = \frac{|\vec{هـ} . \vec{ن}|}{||\vec{هـ}|| \, ||\vec{ن}||}$

(١٨) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص-٢}{١} = \frac{ع+٣}{-٢}$

والمستوى $س + ص + ٤ = ٠$ هو -

الحل

$\vec{هـ}_١ = (٢ ، ١ ، -٢)$

$\vec{ن} = (١ ، ١ ، ٠)$

$جتا θ = \frac{|٢+١|}{\sqrt{٤+١+٤} × \sqrt{٢}} = \frac{٣}{٣\sqrt{٢}} = ٤٥°$

θ المطلوبة $= ٩٠ - [٤٥] = ٤٥°$

بنأخذ المتممة لأن الناتج هو الزاوية بين المستقيم والعمودى وليست احداثيات بين المستقيم والمستوى .

* معادلة المستوى المار بنقطة الأصل $\boxed{د = ٠}$

$أس + ب ص + حـ ع = ٠$

* عندما $أ = ٠$ ، $ب ص + حـ ع + د = ٠$

يوازى محور س وعمودى على المستوى ص ع

* عندما $أ = ٠$ ، $د = ٠$ ، $ب ص + حـ ع = ٠$

يحوى محور س وعمودى على المستوى ص ع

وهكذا

قياس الزاوية بين مستويين

$جتا \theta = \frac{|\vec{ن}_1 \cdot \vec{ن}_2|}{\|\vec{ن}_1\| \|\vec{ن}_2\|}$ ، $٠ \le \theta \le ٩٠$

① إذا كان $\vec{ن}_1 \cdot \vec{ن}_2 = ٠$ متعامدان

② $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} \ne \frac{د_1}{د_2}$ متوازيين وغير منطبقين

③ $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2} = \frac{د_1}{د_2}$ منطبقين

① أوجد قياس الزاوية بين المستويين

$٢س - ص + ع = ٥$

$٤س + ٢ص - ٢ع = ١$

الحل

$\vec{ن}_1 = (٢ ، -١ ، ١)$ ، $\vec{ن}_2 = (٤ ، ٢ ، -٢)$

$جتا \theta = \frac{|٦ - ٢ - ٢|}{\sqrt{٤+١+١} \times \sqrt{١٦+٤+٤}}$

$\therefore \theta \simeq ٧٨° ٢٤' ٤٢''$

② أوجد قيمة ل إذا كان المستويين متوازيين

$٢س - ص + لع = ٥$

$س + لص + ٤ع = ١$

الحل

$\frac{٢}{١} = \frac{-١}{ل} = \frac{ل}{٤}$

$ل = -\frac{١}{٢}$ ، $ل = ٨$

③ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين

$س + ص + ٢ع + ١ = ٠$ ← ①

$٢س + ص - ع + ١ = ٠$ ← ②

الحل

بطرح ① × -١ والجمع

$س - ٣ع = ٠$

$س = ٣ع$ بوضع $ع = ل$

$س = ٣ل$

فى ①

$٣ل + ص + ٢ل + ١ = ٠$

$ص = -١ - ٥ل$

$\therefore$ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى

$س = ٣ل$ ، $ص = -١ - ٥ل$ ، $ع = ل$

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

$ل = \frac{|أس_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$

حيث $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ النقطة

$(أ ، ب ، جـ)$ المتجه العمودى للمستوى

٤ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١، -١، ٣) على المستوى الذى معادلته $\vec{ر} \cdot (٢، ٢، -١) = ٥$

الحل

معادلة المستوى فى الصورة العامة

$٢س + ٢ص - ع - ٥ = ٠$

$ل = \frac{|(٢ \times ١) + (٢ \times -١) - ٣ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

$= \frac{|٢ - ٢ - ٨|}{٣} = \frac{٨}{٣}$ وحدة طول

٥ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠، -١، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}\,س + ص - ع + ل = ٠$ هو ٢ وحدة طول فأوجد قيمة ل

الحل

$٢ = \frac{|٠ - ١ - ٢ + ل|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$

$٢ = \frac{|ل - ٣|}{٢}$ ، $|ل - ٣| = ٤$

$ل - ٣ = \pm ٤$

$ل = \pm ٤ + ٣$

$ل = ٤ + ٣ = ٧$ | $ل = -٤ + ٣ = -١$

$\therefore ل = -١$ أو ٧

٦ كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى $س + ص + ع = ١$ أوجد معادلة الكرة.

الحل

نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها للمستوى

$نق = \frac{|١ + ٢ + ١ - ١|}{\sqrt{١ + ١ + ١}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

∴ معادلة الكرة

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٣$

٧ أثبت أن المستويين

$٢س + ص + ٢ع = ٨$

$٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠$

متوازيين وأوجد البعد بينهما

الحل

$\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} \neq \frac{٨}{-٥}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

لإيجاد البعد بينهما نفرض نقطة على الأول ونجيب بعدها عن الثانى أو العكس

$س = ٠$ ، $ص = ٠$ ∴ $٢ع = ٨$

$ع = ٤$

(٠، ٠، ٤) بعدها عن المستوى الثانى

$= \frac{|٠ + ٠ + ١٦ + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}} = \frac{٢١}{٦} = ٣.٥$ وحدة طول

٨ إذا قطع المستوى

٢س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠

الكرة (س + ٣)² + (ص + ٢)² + (ع − ١)² = ١٥

أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل

مركز الكرة هو

م (−٣ ، −٢ ، ١)

طول نصف قطرها هو م ن = √١٥ تمام ؟

م م' هو البعد بين المركز ومعادلة المستوى

م م' = |−٦ − ٢ + ٢ + ١٢| ÷ √(٤ + ١ + ٤) = ٦/٣ = ٢ وحدة

∴ نصف قطر المقطع الناتج

نق = √(١٥ − ٤) = √١١

∴ مساحة المقطع الناتج = π نق²

= ١١ π وحدة مربعة

٩ أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى

٢س + ص − ٤ع + ٥ = ٠

والواقع على بعد √٢١ من (١ ، ٢ ، ٠)

الحل

∵ المستوى ٢س + ص − ٤ع + ٥ = ٠

∴ معادلته تكون على الصورة

٢س + ص − ٤ع + د = ٠

نحسب البعد بين (١ ، ٢ ، ٠) والمستوى = √٢١

√٢١ = |٢ + ٢ − ٠ + د| ÷ √(٤ + ١ + ١٦)

√٢١ = |د + ٤| ÷ √٢١

|د + ٤| = ٢١

د + ٤ = ± ٢١ ، د = ± ٢١ − ٤

د = ٢١ − ٤ ، د = ١٧ | د = −٢١ − ٤ ، د = −٢٥

∴ المستويان هما

٢س + ص − ٤ع + ١٧ = ٠

، ٢س + ص − ٤ع − ٢٥ = ٠

لإيجاد النسبة التي يقسم بها مستوى المسافة بين النقطتين من الداخل هـ ل : ل؟

انتهى بفضل الله فرع الهندسة الفراغية

مع أطيب تمنياتي القلبية بالنجاح والتفوق للجميع

أ/ محمد أدهم
معلم رياضيات